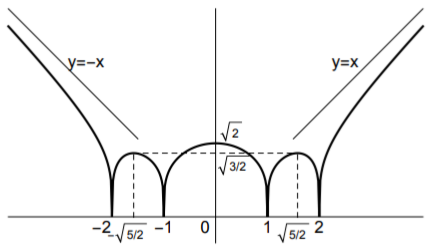
11. cvičení - výsledky

Příklad 1.

1. $Df = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, f je sudá, další údaje uvádíme jen na $[0, \infty)$. $f(0) = \sqrt{2}$, limita v ∞ je ∞. Derivace existuje pro $x \neq \pm 1, \pm 2$, $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = \infty$, $f'_-(2) = -\infty$, $f'_+(2) = \infty$. f je klesající na $[0, 1]$, rostoucí na $[1, \sqrt{\frac{5}{2}}]$, klesající na $[\sqrt{\frac{5}{2}}, 2]$ a rostoucí na $[2, \infty)$. V bodech 1 a 2 jsou minima (globální, hodnota 0), v bodech 0 a $\sqrt{\frac{5}{2}}$ jsou lokální maxima ($f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$). Obor hodnot je $[0, \infty)$. f je ryze konkávní na intervalech $[0, 1]$ (ze sudosti na $[-1, 1]$), $[1, 2]$ a $[2, \infty)$. Inflexní body nemá. Asymptota v ∞ je $y = x$.

   Graf:

2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1 + \log_3 4\}$

   f je na celém $D(f)$ spojitá.

   f není ani sudá, ani lichá. Zřejmě není ani periodická.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-3}{8}, \lim_{x\to 1+\log_3 4-} f(x) = \lim_{x\to 1+\log_3 4+} f(x) = \infty, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

   f na $(-\infty, \log_3 \frac{9}{2}) \cup (\log_3 12, \infty)$ klesá a na $(\log_3 \frac{9}{2}, \log_3 12)$ roste.

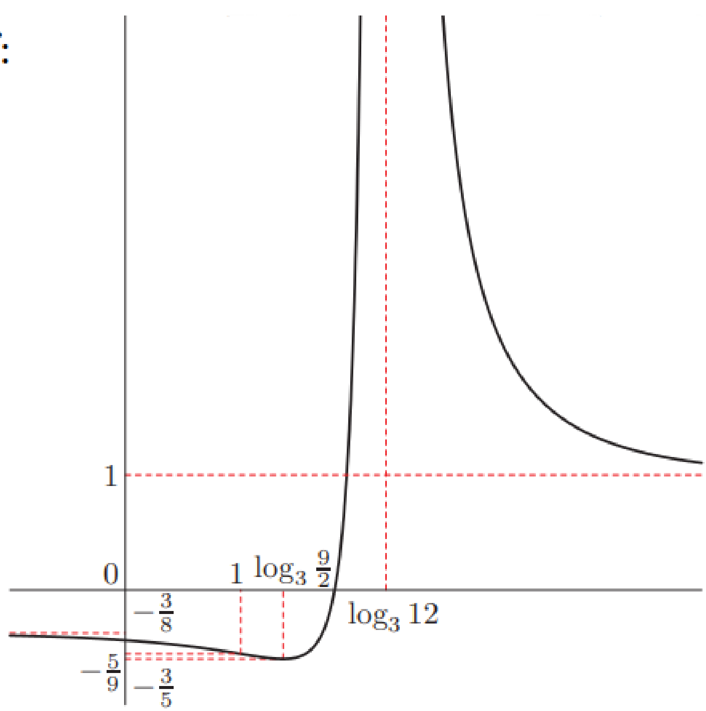
   Globální minimum je bod $\left[\log_3 \frac{9}{2}, -\frac{3}{5}\right]$.

   f je na $(-\infty 1)$ konkávní a na $(1, \log_3 12)$ a na $(\log_3 12, \infty)$ konvexní.

   Inflexní bod je $[1, -\frac{5}{9}]$.

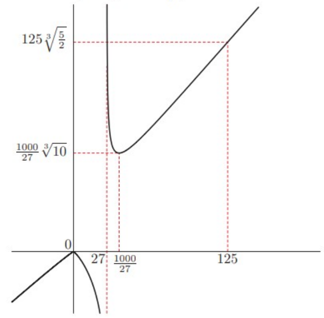
   Asymptota v ∞ je $y = 1$, asymptota v $-\infty$ je $y = -\frac{3}{8}$.

   Graf:

Příklad 2 a

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{27\}$, f je spojitá v každém bodě D_f, limita v $-\infty$ je $-\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$, limita v 27 zleva $-\infty$ a zprava $+\infty$. f je rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$, klesající na $\langle 0, 27)$, klesající na $(27, \frac{1000}{27}\rangle$, rostoucí na $\langle \frac{1000}{27}, +\infty)$; $f'(0) = 0$ (je třeba dopočítat zvlášť), v bodě 0 je lokální maximum (hodnota 0), v bodě $\frac{1000}{27}$ lokální minimum (hodnota $\frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}$); $H_f = (-\infty, 0\rangle \cup \langle \frac{1000}{27}\sqrt[3]{10}, +\infty)$. f je konkávní na $(-\infty, 27)$, konvexní na $(27, 125)$, konkávní na $(125, +\infty)$. V bodě 125 je inflexní bod. f nemá asymptoty. Graf:

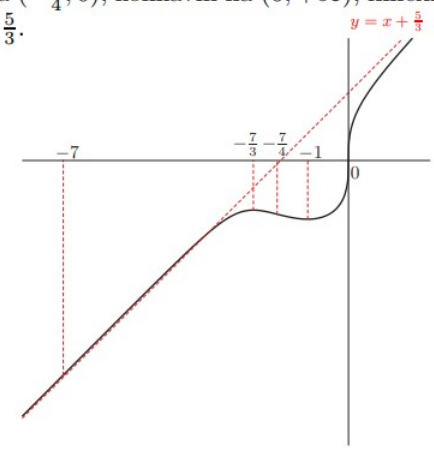


zbytek na násl. straně

Příklad 2 b

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R}$, f je spojitá na $\mathbf{R}$, limita v $-\infty$ je $-\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$. f má vlastní derivaci na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f'(0) = +\infty$; f je rostoucí na $(-\infty, -\frac{7}{3}\rangle$, klesající na $\langle -\frac{7}{3}, -1\rangle$, rostoucí na $\langle -1, +\infty)$; v bodě $-\frac{7}{3}$ má lokální maximum, v bodě -1 lokální minimum, $H_f = \mathbf{R}$. f je konvexní na $(-\infty, -7)$, konkávní na $(-7, -\frac{7}{4})$, konvexní na $(-\frac{7}{4}, 0)$, konkávní na $(0, +\infty)$, inflexní body jsou -7 a $-\frac{7}{4}$. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = x + \frac{5}{3}$.

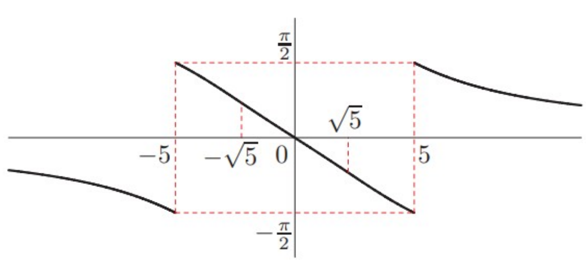
Graf:



Příklad 2 c

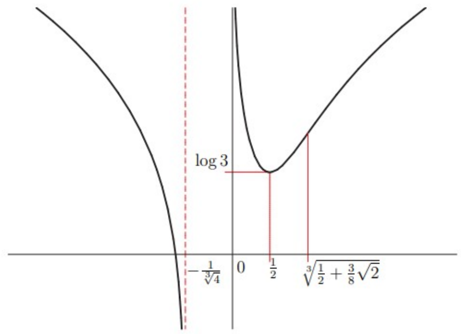
Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-5, 5\}$, f je lichá, stačí tedy vyšetřit na $\langle 0, 5) \cup (5, +\infty)$. $f(0) = 0$, limita v bodě 5 zleva je $-\frac{\pi}{2}$, limita v bodě 5 zprave je $\frac{\pi}{2}$, limita v $+\infty$ je 0. f je klesající na $\langle 0, 5)$ a na $(5, +\infty)$ (z lichosti plyne, že je klesající na $(-5, 5)$ i na $(-\infty, -5)$, lokální extrémy nemá, $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. f je konkávní na $(0, \sqrt{5})$, konvexní na $(\sqrt{5}, 5)$, konvexní na $(5, +\infty)$; symetricky na záporné poloose; inflexní body jsou -5, 0 a 5. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = 0$.

Graf:



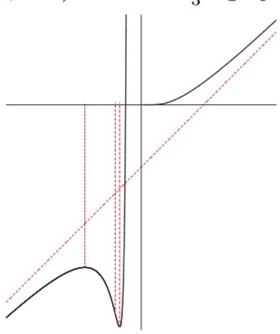
Příklad 2 d

Příklad 4: $D_f = (-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}) \cup (0, +\infty)$; f je klesající na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$, klesající na $(0, \frac{1}{2}\rangle$, rostoucí na $\langle \frac{1}{2}, +\infty)$, v bodě $\frac{1}{2}$ je lokální minimum; $H_f = \mathbf{R}$; f je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$, konvexní na $(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}}\rangle$, konkávní na $\langle \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}}, +\infty)$, v bodě $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2}}$ je inflexní bod; f nemá asymptoty.
Graf:



Příklad 2 e

Příklad 4: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; f je spojitá v každém bodě D_f; limita v $-\infty$ je $-\infty$, v $+\infty$ je $+\infty$, v 0 zleva $+\infty$, v 0 zprava 0. f je rostoucí na $(-\infty, -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\log 2\rangle$, klesající na $\langle -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\log 2, -\frac{5-\sqrt{5}}{2}\log 2\rangle$, rostoucí na $\langle -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\log 2, 0)$, rostoucí na $(0, +\infty)$. V bodě $-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\log 2$ je lokální maximum, v bodě $-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\log 2$ lokální minimum, $H_f = \mathbf{R}$. f je konkávní na $(-\infty, -\frac{5}{3}\log 2\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{5}{3}\log 2, 0)$, konvexní na $(0, +\infty)$. V bodě $-\frac{5}{3}\log 2$ je inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = x - 4\log 2$.
Graf:



Příklad 3 Vizte zde: odkaz.